2.2 Les théorèmes fondamentaux

2.2.1 Théorème (de Banach-Steinhaus (ou de la borne uniforme))
Soit X un de Banach et Y un espace vectoriel normé.
Soit $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{L}(X,Y)$.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) la famille $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est uniformément bornée* i.e. $\sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha\| < +\infty$

ii) la famille $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est simplement bornée* i.e. $\forall x \in X$, $\sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha(x)\| < +\infty$.

Démonstration: "$\Longrightarrow$" Soit $C = \sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha\| < +\infty$. Alors, pour tout $x \in X$, $\|L_\alpha(x)\| \leq \|L_\alpha\|.\|x\|$, d'où $\sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha(x)\| \leq C\|x\| < +\infty$.

"$\Longleftarrow$" Pour chaque $x \in X$, on pose

$$M(x) = \sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha(x)\| \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n = \{x \in X :\ M(x) \leq n\}.$$

On remarquera que $F_n = \bigcap_{\alpha\in I}\{x \in X :\ \|L_\alpha(x)\| \leq n\}$ est un fermé de X.
Par hypothèse on a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, n'est pas un sous-ensemble maigre dans X et comme les F_n sont fermés, il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que F_m n'est pas d'intérieur vide i.e. il existe, $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B_X(x_0,\varepsilon)} \subseteq F_m$. D'où, pour tout $x \in \overline{B_X(0,1)}$, on a

$$\|L_\alpha(x)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|L_\alpha(x_0+\varepsilon x - x_0)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|L_\alpha(x_0+\varepsilon x)\| + \frac{1}{\varepsilon}\|L_\alpha(x_0)\| \leq \frac{2m}{\varepsilon}$$

Ainsi, $\sup_{\alpha\in I}\|L_\alpha\| \leq \frac{2m}{\varepsilon} < +\infty$, comme souhaité. ∎

2.2.3 Exercice Vérifier que les sous-ensembles F_n dans la preuve ci-dessus sont fermés, convexes et symétriques.

2.2.4 Corollaire
Soit X un de Banach et Y un espace vectoriel normé. Soit une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{L}(X,Y)$ telle que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y. Alors la limite est dans $L(X,Y)$ i.e. si on pose pour tout $x \in X$, $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, alors $f \in \mathscr{L}(X,Y)$.

Démonstration: On montre facilement en utilisant l'unicité de la limite que f est linéaire. Montrons que f est continue. La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est donc bornée ainsi pour tout $x \in X$ i.e. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n(x)\| < +\infty$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $C > 0$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < C$, ainsi pour tout $x \in X$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| < C\|x\|$, et par passage à la limite on aura $\|f(x)\| < C\|x\|$ i.e. $f \in \mathscr{L}(X,Y)$. ∎

2.2.6 Remarque

Le corollaire précédent ne garantit pas la convergence en norme. Par exemple, si $X = c_0$ et $f_k(x) = x_k$ pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors

1. pour tout $x \in c_0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 0$.
2. D'autre part, on a $|f_k(x)| \leq \|x\|_\infty$ et $|f_k(e_k)| = 1$ pour $e_k = (\delta_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ donne $\|f_k\| = 1$.

Donc f_k ne converge pas en norme vers 0.

Applications

I) Densité des fonctions non différentiables

On considère l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de convergence uniforme. On va montrer que la majorité des éléments de $C([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas différentiables. Soit $x_0 \in]0,1[$ fixé. Soit $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]0,1[$. Pour $0 < h < \delta$ on définit la forme linéaire ϕ_h sur $C([0,1],\mathbb{R})$ par : pour tout $f \in C[0,1]$

$$\phi_h(f) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

On vérifie facilement que ϕ_h est linéaire et que $\|\phi_h\| = \frac{1}{h}$. D'où $\sup_{0<h<\delta} \|\phi_h\| = +\infty$. Par conséquent, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, l'ensemble des f tel que $\sup_{0<h<\delta} |\phi_h(f)| = +\infty$, est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$. En d'autre termes, l'ensemble des fonctions qui ne sont pas différentiables en x_0 est dense dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

II) Application à la convergence des séries de Fourier

On va utilise le théorème de Banach-Steinhaus pour montrer :

2.2.7 Corollaire

Il existe une fonction f continue et 2π-périodique telle que la suite des sommes partielles de sa série de Fourier en 0, $S_n(f)(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}$ ne converge pas vers $f(0)$.

On considère l'espace de Banach, $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, des fonctions 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, muni de la norme de convergence uniforme. Pour une fonction $f \in E$ la $n$ième somme partielle de Fourier est $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-s)}\right) f(s)\,ds$. Un calcul de somme de série géométrique, donne pour $\theta \neq 0$,
$D_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ et $D_n(0) = 2n+1$. Ainsi les sommes partielles de Fourier peuvent être représentées par le produit de convolution de f avec le noyau de Dirichlet D_n i.e. :

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s)f(s)\,ds.$$

On s'intéresse au comportement de $S_n(f)(0)$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la forme linéaires l_n sur E, par $\ell_n(f) := S_n(f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)f(s)\,ds$. Comme $\|D_n\|_\infty \leq 2n+1$ et $|\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\|f\|\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s)|\,ds$ on aura $\|\ell_n\| \leq 2n+1$ et donc ℓ_n est continue. Maintenant, si toute série de Fourier de tout élément $f \in E$ converge en 0, on aurait
$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\ell_n(f)\| < +\infty$ et d'après le théorème de Banach-Steinhaus $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\ell_n\| < +\infty$.

En fait, on peut construire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une suite de fonctions de E, f_k telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $-1 \leq f_k \leq 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{k\to+\infty} f_k(t) = signe(D_n(t))$.

Alors $\lim_{k\to+\infty} \|\ell_n(f_k)\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s)|\,ds$, d'où

$$\|\ell_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s)|\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{1}{2}s}\right| ds = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})s\right|}{\sin\frac{1}{2}s}.$$

et d'après le lemme suivant, la suite $(\|\ell_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, ainsi il existe $f \in E$ dont la série de fourier diverge en 0.

2.2.8 Lemme

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s)|\,ds = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + O(1)$$

lorsque $n \to +\infty$ où $O(1)$ désigne une fonction de n bornée.

Démonstration: On commence par remarquer que pour tout $t \in [0, \pi]$:
$|\sin(n+\frac{1}{2}) - \sin(nt)| \leq 2\sin(\frac{t}{4})$ d'où
$L_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})s\right|}{\sin\frac{1}{2}s} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{\sin\frac{1}{2}s}\, ds + O(1)$
D'autre part, la fonction $s \mapsto \frac{1}{\sin\frac{1}{2}s} - \frac{2}{s}$ est continue sur $]0, \pi]$ et prolongeable par continuité en $s = 0$.
Ainsi $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{\sin\frac{1}{2}s}\, ds = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{s}\, ds + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin ns| \left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}s} - \frac{2}{s}\right) ds + O(1)$
d'où $L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{s}\, ds + O(1)$.
Maintenant, $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{s}\, ds = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{|\sin t|}{t+k\pi}\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi}\right)|\sin t|\, dt.$$

Comme $\int_0^\pi |\sin t|\, dt = 2$ et pour $t \in [o, \pi]$, $k\pi \leq t + k\pi \leq (k+1)\pi$ on aura

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{s}\, ds \leq \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

Ainsi $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin ns|}{s} ds = \frac{4}{\pi^2} + O(1)$, et $L_n = \dfrac{4}{\pi^2}\ln(n) + O(1)$ lorsque $n \to +\infty$. ■

2.2.10 REMARQUE (CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER)

(i) L'analyse de la preuve du corollaire, montre que les fonctions continues dont la série de Fourier converge ponctuellement sont rares. Précisément, l'ensemble de ces fonctions est *maigre* dans $C([-\pi, \pi])$ (C'est à dire qu'il s'agit d'une union dénombrable d'ensembles nulle part denses).

(ii) D'autre part, pour toute fonction f continue ou même seulement dans $L^p([-\pi, \pi])$, $p > 1$, la série de Fourier converge vers f presque partout. Ainsi, l'ensemble des points de divergence est toujours négligeable (c'est un résultat de L. Carleson).

(iii) Pour les fonctions de $L^1([-\pi, \pi])$, le résultat de Carleson est généralement faux. Kolmogorov a construit une fonction $f \in L^1([-\pi, \pi])$ dont la série de Fourier diverge partout.

(iv) A noter que si f est *différentiable* en un point t, alors la série de Fourier de f converge vers $f(t)$, c'est une conséquence du critère de Dirichlet-Dini.

2.2.11 Exercice Soit E un espace de Banach et $T \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$ il existe $n_x \in \mathbb{N}$ avec $T^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$.

Le théorème de l'application ouverte et ses corollaires

2.2.12 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE L'APPLICATION OUVERTE)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach. Alors f *est ouverte.*

Démonstration: Nous allons trouver $\delta > 0$ tels que $B_F(0,\ \delta) \subset f(B_E(0,\ 1))$. Ceci impliquera que l'image de toute boule $f(B_E(x,\ r))$ contient une boule $B_F\left(f(x),\ \dfrac{\delta r}{\varepsilon}\right)$, donc que f est ouverte. On pose $F_r = \overline{f(B_E(0,r))}$ pour tout $r > 0$.
Puisque f est linéaire surjective, on a $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Puisque F est complet donc de Baire et que les F_n sont fermés, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que F_{n_0} a un intérieur non vide, donc $F_r = \frac{r}{n_0} F_{n_0}$ a un intérieur non vide pour tout $r > 0$. Soit $B_F(y,\ r_0)$ une boule contenue dans $F_{\frac{1}{2}}$, alors, par symétrie par rapport à 0 de $F_{\frac{1}{2}}$, $B_F(-y, r_0)$ est aussi contenue dans $F_{\frac{1}{2}}$, comme tout $x \in B_F(0,\ r_0)$ s'écrit $(y + x) + (-y)$, est donc dans $F_{\frac{1}{2}} + F_{\frac{1}{2}} \subset F_1$. D'où F_1 est un voisinage de 0, et il en est de même de F_r pour tout $r > 0$. Donc si $y \in F_r$, comme il est adhérent à $f(B(0,\ r))$ il existe $x \in f(B(0,\ r))$ tel que $y - f(x) \in F_{\frac{r}{2}}$. Appliquant ceci à $y \in F_1$, on trouve $x_1 \in B(0,\ 1)$ tel que $y - f(x_1) \in F_{\frac{1}{2}}$, puis par récurrence on construit ainsi $x_n \in B_E(0, \frac{1}{2^n})$ tel que $y - f(x_1 + \cdots + x_n) \in F_{\frac{1}{2^n}}$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$ et puisque E est complet, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge vers un $x \in \overline{B_E(0,2)}$. Alors $f(x) = y$, donc

$$f(B_E(0,4)) \supset f\left(\overline{B_E(0,2)}\right) \supset F_1 \supset B_F\left(0, r_0\right).$$

Ainsi pour $\delta = \frac{r_0}{4}$, on aura $B_F(0,\ \delta) \subset f(B_E(0,\ 1))$. ∎

2.2.14 COROLLAIRE (THÉORÈME D'ISOMORPHISME DE BANACH)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue bijective entre espaces de Banach. Alors f^{-1} est continue, d'où $f \in Isom(E, F)$.

Démonstration: Le théorème dit que f est ouverte, donc l'image réciproque par f^{-1} de tout ouvert de E est un ouvert de F, donc f^{-1} est continue.

2.2.16 COROLLAIRE
Soit $f : E \to F$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach. Alors f induit, par passage au quotient, un isomorphisme entre les espaces de Banach $E/\ker f$ et F.

Démonstration: Par passage au quotient, $\overline{f} : E/\mathrm{ker} f \to F$ telle que $\overline{x} \mapsto \overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ est un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels, comme f est continue, $\ker f$ est bien un sous-espace vectoriel fermé de E, d'où $E/\ker f$ est un espace de Banach. En outre cette bijection linéaire est continue, c'est donc un isomorphisme d'espaces de Banach.

2.2.18 PROPOSITION (ÉQUIVALENCE DES NORMES)
Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ deux normes qui munissent toutes deux E d'une structure d'espace de Banach.
Supposons qu'il existe $c \geq 0$ tel que $|||x||| \leq c\|x\| \quad$ pour tout $x \in E$. Alors ces deux normes sont équivalentes.

Démonstration: On applique le corollaire précédent à l'identité de $(E, \|.\|)$ dans $(E, |||.|||)$ qui est bijective et continue. ∎

2.2.20 EXEMPLE. La proposition montre qu'il est en général difficile de construire de bonnes normes non équivalentes sur un espace de dimension infinie. Soit l'espace sera non complet ou les normes ne seront pas comparables. Il s'agit d'un moyen simple de prouver la non complétude des espaces.

A titre d'exemple, on considère les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$. D'une part, $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$. D'autre part, les normes ne sont pas équivalentes - on peut facilement construire une suite de fonctions f_n telles que $\|f_n\|_1 = 1$ et $\|f_n\|_\infty \geq n$ pour tout n. Par conséquent E ne doit pas être complet pour l'une de ces normes. Comme on sait qu'il est complet pour la norme (naturelle) $\|\cdot\|_\infty$, il s'ensuit que E n'est pas complet par rapport à $\|\cdot\|_1$.

Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces métriques E et F. Le *graphe* de f est le sous-ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ de $E \times F$.

Si f est continue, pour toute suite (x_n) qui converge vers un x de E, on a $(f(x_n))$ qui converge vers $f(x)$ dans F, en particulier Γ_f est un fermé de $E \times F$. Pour la réciproque on a besoin de la linéarité et de la complétude :

2.2.21 COROLLAIRE (THÉORÈME DU GRAPHE FERMÉ)
Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces de Banach. On suppose que son graphe $\Gamma_f = \{(x,\ f(x)) | x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$. Alors f est continue.

Démonstration: L'hypothèse implique que Γ_f est un espace de Banach. Notant p_E et p_F les projections de $E \times F$ sur E et F, elles sont continues donc $p_E|\Gamma_f = p : \Gamma_f \to E$ est continue. Comme p est bijective, c'est un isomorphisme. Donc $f = p_F \circ p^{-1}$ est continue. ∎

2.2.23 EXEMPLE. A titre d'exemple, considérons le plus simple opérateur différentiel $T = \dfrac{d}{dt}$ de $C^1([0,1],\mathbb{R})$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$ où $C^1([0,1],\mathbb{R})$ est considéré comme un sous-espace de $C([0,1],\mathbb{R})$, c'est à dire par rapport à la norme uniforme. L'opérateur différentiel T est de graphe fermé.

En effet, soit $f_n \to f$ et $Tf_n = f_n' \to g$ dans $C([0,1],\mathbb{R})$, i.e. la convergence est uniforme. Alors, par le théorème de dérivation à la limite, $(\lim_n f_n)' = \lim_n f_n'$, c'est à dire que $g = Tf$. Ceci termine la preuve.

Néanmoins, comme nous le savons l'opérateur différentiel n'est pas continue, par exemple $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ converge uniformément vers 0, mais f_n' ne converge même pas simplement. Cela ne contredit pas le théorème du graphe fermé, car $C^1([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet par rapport à la norme uniforme.

2.2.24 Exercice Montrer que $C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.

2.2.1 Le théorème de Hahn-Banach

Le théorème de Hahn-Banach permet de d'étendre des formes linéaires continues d'un sous-espace vectoriel normé, tout en préservant la continuité.

2.2.25 THÉORÈME (DE HAHN-BANACH (FORME ANALYTIQUE))
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $p : E \to \mathbb{R}$ une application telle que :

(i) $p(tx) = tp(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in X$.

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Alors il existe une forme linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ telle que

1. $g = f$ sur F i.e. $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.
2. $g \leq p$ sur E i.e. $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration: On suppose que $F \neq E$, sinon il n'y a rien à montrer.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des paires ordonnées (F', h'), où F' est un sous-espace vectoriel contenant F et h' est une extension de f à F' telle que $h' \leq p$ sur F'. L'ordre partiel sur $\mathscr{E}$ est défini par

$$(F', h') \preccurlyeq (F'', h'') \quad \text{si et seulement si } F' \subset F'', h' = h'' \text{ sur } F'.$$

$\mathscr{E}$ n'est pas vide, puisqu'il contient (F, f), on va montrer qu'il est inductif.

Soit $C = \{(F_i, h_i)\ , i \in I\}$ une chaîne de $\mathscr{E}$ i.e. une partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$. On pose $F_C = \bigcup_{i \in I} F_i$ et $h_C : F_C \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par :

$$h_C(x) = f_i(x) \quad \text{for } x \in F_i.$$

Alors, (F_C, h_C) est un majorant de C. Ainsi $(\mathscr{E}, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné inductif et en vertu du lemme de Zorn, il admet un élément maximal (F_g, g). Tout ce qui reste à vérifier pour terminer la preuve, est que $F_g = E$. Supposons le contraire i.e. $F_g \neq E$. Soit $x_0 \in E \setminus F_g$.
Soient $x, y \in F_g$, alors

$$f(x) - f(y) \leq p(x - y) \leq p(x + x_0) + p(-y - x_0)$$

d'où $-p(-y - x_0) - f(y) \leq p(x + x_0) - f(x)$. Ainsi pour tout $x \in F_g$,

$$S = \sup_{y \in F_g} \{-p(-y - x_0) - f(y)\} \leq p(x + x_0) - f(x),$$

d'où

$$S \leq \inf_{x \in F_g} \{p(x + x_0) - f(x)\} = I.$$

Alors tout $a \in [S, I]$ est tel que pour tout $y \in F_g$,

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq a \leq p(y + x_0) - f(y). \tag{2.2.1}$$

On pose alors $F_{x_0} = \{x + tx_0 : x \in F_g, t \in \mathbb{R}\} = F_g \oplus \mathbb{R}x_0$. D'où si $w \in F_{x_0}$ on a $w = x + tx_0$ et la décomposition est unique. On définit la fonction h sur F_{x_0} par

$$h(w) = f(x) + at.$$

Alors h est linéaire sur F_{x_0} et est une extension de f de F à F_{x_0}. On remarque alors que

$$h(w) \leq p(w) \quad \text{sur } F_{x_0}.$$

Ceci est une conséquence directe de (2.2.1) en posant $y = \dfrac{x}{t}$, $t \neq 0$ et en considérant le cas $t > 0$ puis $t < 0$.

Alors (F_{x_0}, h) est un élément de $\mathscr{E}$, tel que $(F_g, g) \preccurlyeq (F_{x_0}, h)$, ce qui est une contradiction puisque (F_g, g) est un élément maximal. ∎

2.2.27 COROLLAIRE (EXTENSION PAR CONTINUITÉ)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.) Soit F un sous-espace vectoriel et $f : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Alors il existe une forme linéaire continue $g : E \to \mathbb{K}$ telle que $\|g\| = \|f\|$.

Démonstration: (i) $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

On pose $C = \|f\|$ et $p = C\|.\|$. Alors $f \leq p$ sur F et d'après le théorème de hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue $g : E \to \mathbb{R}$ telle que $g = f$ sur F et $g \leq p$ sur E. Ceci entraîne que pour tout $x \in E$, $g(x) \leq C\|x\|$ et $g(-x) \leq C\| - x\| = C\|x\|$ i.e. $|g(x)| \leq C\|x\|$. D'où lg $\| \leq C = \|f\|$ et comme $|g(x)| = |f(x)|$ sur F, on aura $\|g\| \geq \|f\|$ ce qui donne finalement $\|g\| = \|f\|$.

(ii) $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$.

On écrit, $f = f_1 + if_2$, où $f_1 = \mathfrak{Re}(f)$ et $f_2 = \mathfrak{Im}(f)$. Alors f_1 et f_2 sont des formes linéaires réelles sur F considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f_2(x) = -f_1(ix)$. D'après le cas réel, il existe une forme linéaire continue $g_1 : E \to \mathbb{R}$ telle que $g_1 = f_1$ sur F et $\|g_1\| = \|f_1\|$. On pose, pour tout $x \in E$, $g(x) = g_1(x) - ig_1(ix)$. Alors $g(x) = f(x)$ sur F, on aussi $g(ix) = ig(x)$ et comme g_1 est $\mathbb{R}$-linéaire, g est $\mathbb{C}$-linéaire sur l'espace vectoriel complexe E. Il reste à montrer que $\|g\| \leq \|f\|$, ce qui entraînera $\|g\| = \|f\|$. Soit $x \in E$ tel que $g(x) \neq 0$ et $\alpha = \arg(g(x))$, d'où

$$|g(x)| = g(x)e^{-i\alpha} = g(xe^{-i\alpha}) = g_1(xe^{-i\alpha}) = \|g_1(xe^{-i\alpha})\| \leq \|g_1\|\|x\| = \|f\|\|x\|$$

donc $\|g\| \leq \|f\|$. ■

2.2.29 COROLLAIRE

Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $x_0 \in E - \{0\}$. alors il existe une forme linéaire continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(x_0) = \|x_0\| \\ \|f\| = 1 \end{cases}$$

Démonstration: Soit $x_0 \neq 0$, on pose $F = \text{Vect}(x_0) = \{tx_0 \,|\, t \in \mathbb{K}\}$, F est un sous-espace et on définit le forme linéaire, $f_0 : F \to \mathbb{K}$, par $f_0(tx_0) = t\|x_0\|$. Alors f_0 est une forme linéaire continue sur F de norme $\|f_0\| = 1$ (puisque $|f_0(x)| = |t|\,\|x_0\| = \|x\|$ pour tout $x \in F$). D'après le corollaire précédent, f_0 admet une extension linéaire continue $f : E \to \mathbb{K}$ qui préserve la norme i.e. $\|f\| = \|f_0\| = 1$ et $f = f_0$ sur F, entraine que $f(x_0) = \|x_0\|$. ■

2.2.31 REMARQUE
Si $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, alors il existe toujours une forme linéaire continue et non identiquement nulle sur E i.e. $E' \neq \{0\}$.

2.2.32 Exercice Montrer que tout sous-espace de dimension finie $F \subset E$ d'un evn admet un supplémentaire fermé.

2.2.33 COROLLAIRE (E' SÉPARE LES POINTS DE E)
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Pour tous vecteurs $x_1 \neq x_2$ dans E, il existe $f \in E'$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Démonstration: Si on pose $x = x_1 - x_2 \neq 0$, d'après le corollaire précédent, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\| > 0$ d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$.